JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **28**, 359–365 (1980)

Inégalité de Bernstein dans les espaces L^p avec poids

PIERRE GOETGHELUCK

Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Département de mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

Communicated by Oved Shisha

Received October 25, 1978

INTRODUCTION

Soit H_n l'espace des polynômes trigonométriques de période 2π et d'ordre au plus n. On pose $K = [-\pi, +\pi]$. Pour toute fonction f mesurable périodique de période 2π on note pour $p \geqslant 1$

$$\|f\|_p = \left[\int_K |f(\theta)|^p \, d\theta\right]^{1/p} \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup \text{ess} \, |f(\theta)| \, .$$

L'inégalité de Bernstein "classique" peut s'énoncer ainsi [3, p. 215]: Pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour tout $T \in H_n$ ($n \geqslant 0$) on a

$$\|T'\|_p \leqslant n \|T\|_p \, . \tag{1}$$

Soit $a \geqslant 0$ et w_a la fonction périodique de période 2π telle que $w_a(\theta) = |\theta|^a$ pour $\theta \in K$. Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME. *Il existe une constante C_a telle que pour tout $p \in [1, +\infty]$, et pour tout $T \in H_n$ ($n \geqslant 0$) on ait:*

$$\|T' \cdot w_a\|_p \leqslant C_a n \|T \cdot w_a\|_p \, .$$

INÉGALITÉ PRELIMINAIRE

Dans ce paragraphe nous nous proposons de démontrer l'inégalité suivante:

PROPOSITION. *a et b étant deux nombres réels positifs, il existe une constante $K_{a,b}$ telle que pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour tout $T \in H_n$ ($n \geqslant 1$) on ait:*

$$\|T \cdot w_a\|_p \leqslant K_{a,b} n^b \|T \cdot w_{a+b}\|_p \, .$$

0021-9045/80/040359–07$02.00/0

Démonstration. Il suffit de démontrer la proposition pour p fini car si f est une fonction bornée $\|f\|_p \to_{p\to\infty} \|f\|_\infty$. Soit $T \in H_n$ et θ_0 tel que $\|T\|_\infty = |T(\theta_0)|$ et soit $J_n = [\theta_0 - (2n)^{-1}, \theta_0 + (2n)^{-1}]$. Il résulte de (1) que pour $\theta \in J_n$,

$$|T(\theta)| - |T(\theta_0)| \leqslant |\theta - \theta_0|\, n\, \|T\|_\infty \leqslant \tfrac{1}{2}\|T\|_\infty$$

donc pour $\theta \in J_n$, $|T(\theta)| \geqslant \frac{1}{2}\|T\|_\infty$. On a alors

$$\int_{J_n} |T(\theta)\, w_{a+b}(\theta)|^p\, d\theta \geqslant 2^{-p}\|T\|_\infty^p \int_{J_n} |w_{a+b}(\theta)|^p\, d\theta$$

et l'on a de façon évidente:

$$\int_{J_n} |w_{a+b}(\theta)|^p\, d\theta \geqslant \int_{-1/2n}^{1/2n} |\theta|^{p(a+b)}\, d\theta$$
$$= 2(p(a+b)+1)^{-1}(2n)^{-pa-pb-1}$$

donc

$$\int_{J_n} |T(\theta)\, w_{a+b}(\theta)|^p\, d\theta \geqslant 2^{1-p}(pa+pb+1)^{-1}(2n)^{-pa-pb-1}\|T\|_\infty^p. \qquad (2)$$

Nous avons en posant $I_n = [-1/n, 1/n]$

$$\int_{I_n} |T(\theta)\, w_a(\theta)|^p\, d\theta \leqslant 2n^{-ap-1}\|T\|_\infty^p. \qquad (3)$$

De (2) et (3) on tire:

$$\int_{I_n} |T(\theta)\, w_a(\theta)|^p\, d\theta \leqslant 2^{pa+pb+p+1}(pa+pb+1)\, n^{pb}\|T\cdot w_{a+b}\|_p^p. \qquad (4)$$

Par ailleurs:

$$\int_{K\setminus I_n} |T(\theta)\, w_{a+b}(\theta)|^p\, d\theta \geqslant n^{-pb}\int_{K\setminus I_n} |T(\theta)\, w_a(\theta)|^p\, d\theta. \qquad (5)$$

En réunissant (4) et (5) nous obtenons:

$$\|T\cdot w_a\|_p^p \leqslant n^{bp}[1 + 2^{p(a+b+1)+1}(p(a+b)+1)]\,\|T\cdot w_{a+b}\|_p^p.$$

Mais $[1 + 2^{p(a+b+1)+1}(p(a+b)+1)]^{1/p} \leqslant 1 + 2^{a+b+2}(a+b+1)\,p^{1/p}$. Il suffit donc de prendre $K_{a,b} = 1 + 2^{a+b+2}(a+b+1)\,e^{1/e}$ car on a toujours $p^{1/p} \leqslant e^{1/e}$.

APPROXIMATION DE LA FONCTION w_a $(a < 2)$

LEMME 1. *Soit $a \in [0, 1]$; Il existe quatre constantes positives C_1, C_2, C_3, C_4, (dépendantes de a) telles que pour tout $n \geqslant 1$, on puisse trouver $P_{2n} \in H_{2n}$ vérifiant pour tout θ:*

$$w_a(\theta) \leqslant C_1 \,|\, P_{2n}(\theta)| + C_2 n^{-a}; \tag{6}$$

$$| P_{2n}(\theta)| \leqslant C_3 w_a(\theta) + C_4 n^{-a}; \tag{7}$$

$$\| P'_{2n} \|_\infty \leqslant a n^{1-a}. \tag{8}$$

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$, considérons la fonction f_n périodique de période 2π définie par:

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= \tfrac{1}{2} n^{-a}[a(n\theta)^2 + 2 - a], && \text{pour } |\theta| \leqslant 1/n, \\ &= w_a(\theta), && \text{pour } 1/n \leqslant |\theta| \leqslant 1, \\ &= -\tfrac{1}{2} a(\pi - 1)^{-1}(\pi - |\theta|)^2 + 1 + \tfrac{1}{2} a(\pi - 1), && 1 \leqslant |\theta| \leqslant \pi. \end{aligned}$$

La fonction f_n est positive et continûment dérivable et vérifie

$$\| f'_n \|_\infty = a n^{1-a}$$

$$f_n(\theta) \leqslant n^{-a}, \qquad \text{pour } \theta \in I_n\,,$$

$$\pi^{-a} w_a(\theta) \leqslant f_n(\theta) \leqslant [\tfrac{1}{2} a(\pi - 1) + 1]\, w_a(\theta), \qquad \text{pour } \theta \in K \backslash I_n$$

donc

$$w_a(\theta) \leqslant \pi^a f_n(\theta) \qquad (\theta \in K) \tag{9}$$

et

$$f_n(\theta) \leqslant [\tfrac{1}{2} a(\pi - 1) + 1]\, w_a(\theta) + n^{-a} \qquad (\theta \in K). \tag{10}$$

Soit L_n le noyau de Jackson:

$$L_n(t) = \lambda_n^{-1} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} n t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^4$$

où λ_n est une constante telle que $\| L_n \|_1 = 1$. Posons $P_{2n}(\theta) = \int_K f_n(\theta - t)\, L_n(t)\, dt$ on a alors [2, p. 84] $P_{2n} \in H_{2n-2}$ $(\subset H_{2n})$. Nous allons montrer que ce polynôme P_{2n} convient. D'après [2, p. 84]

$$\| f_n - P_{2n} \|_\infty \leqslant 6 n^{-1} \| f'_n \| = 6 a n^{-a}, \tag{11}$$

$$| P'_{2n}(\theta)| = \left| \int_K f'_n(\theta - t)\, L_n(t)\, dt \right| \leqslant \| f'_n \|_\infty = a n^{1-a}$$

ce qui établit (8). D'autre part, de (9), (10) et (11) on tire immédiatement $C_1 = \pi^a$, $C_2 = 6a\pi^a$, $C_3 = \frac{1}{2}a(\pi - 1) + 1$, $C_4 = 6a + 1$.

LEMME 2. *Soit $a \in]1, 2[$. Il existe six constantes positives C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10} (dépendantes de a) telles que pour tout $n \geqslant 1$ on puisse trouver $Q_n \in H_n$ vérifiant pour tout θ*

$$w_a(\theta) \leqslant C_5 \,|\, Q_n(\theta) \,|\, + C_6 n^{-a}; \tag{12}$$

$$|\, Q_n(\theta) \,| \leqslant C_7 w_a(\theta) + C_8 n^{-a}; \tag{13}$$

$$Q'_n(\theta) \leqslant C_9 w_{a-1}(\theta) + C_{10} n^{1-a}. \tag{14}$$

Démonstration. Pour tout $n \geqslant 1$ considérons la fonction g_n paire périodique de période 2π vérifiant $g_n(0) = 0$ et telle que g'_n soit la fonction impaire définie par

$$\begin{aligned} g'_n(\theta) &= \tfrac{1}{2}a[(a - 2)\, n^{4-a}\theta^3 - (4 - a)\, n^{2-a}\theta], && \text{pour } 0 \leqslant \theta \leqslant 1/n, \\ &= a\theta^{a-1}, && \text{pour } 1/n \leqslant \theta \leqslant 1, \\ &= \tfrac{1}{2}a[(a - a\pi - \pi - 2)(1 - \pi)^{-3}(\theta - \pi)^3 \\ &\quad - (a - a\pi - \pi - 4)(1 - \pi)^{-1}(\theta - \pi)], && \text{pour } 1 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que la fonction g_n est positive et deux fois continûment dérivable et que l'on a $\| g''_n \|_\infty \leqslant C_{11} n^{2-a}$. Nous avons par ailleurs, pour $|\theta| \leqslant 1$,

$$|\, g_n(\theta) - w_a(\theta) \,| \leqslant \left| \int_0^{1/n} (g'_n(\theta) - a\theta^{a-1})\, d\theta \right| \leqslant C_{12} n^{-a}.$$

Pour $1 \leqslant |\theta| \leqslant \pi$ on a $\frac{1}{2} \leqslant g_n(\theta)$ et $1 \leqslant w_a(\theta)$. Par suite il existe donc deux constantes C_{13} et C_{14} telles que

$$w_a(\theta) \leqslant C_{13} g_n(\theta) \qquad \text{et} \qquad g_n(\theta) \leqslant C_{14} w_a(\theta).$$

Au total, pour tout θ nous avons:

$$w_a(\theta) \leqslant (1 + C_{13})\, g_n(\theta) + C_{12} n^{-a}, \tag{15}$$

$$g_n(\theta) \leqslant (1 + C_{14})\, w_a(\theta) + C_{12} n^{-a}. \tag{16}$$

Un raisonnement tout à fait analogue à celui du Lemme 1 nous montre que

$$g'_n(\theta) \leqslant C_{15} w_{a-1}(\theta) + C_{16} n^{1-a}. \tag{17}$$

D'après [1, p. 61; 2, p. 89] on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe alors $Q_k \in H_k$ tel que

$$\| g_n - Q_k \|_\infty \leqslant C_{17} k^{-2} \| g_n'' \|_\infty ,$$

$$\| g_n' - Q_k' \|_\infty \leqslant C_{18} k^{-1} \| g_n'' \|_\infty$$

en particulier si $k = n$

$$\| g_n - Q_n \|_\infty \leqslant C_{19} n^{-a}, \tag{18}$$

$$\| g_n' - Q_n' \|_\infty \leqslant C_{20} n^{1-a}. \tag{19}$$

Le polynôme Q_n convient puisque (12) résulte de (15) et (18), (13) résulte de (16) et (18), (14) résulte de (17) et (19).

Démonstration du Théorème

Comme pour la proposition il suffit de faire la démonstration pour p fini. Soit $T \in H_n$.

Supposons pour commencer que $0 < a \leqslant 1$ et soit P_{2n} le polynôme trigonométrique du Lemme 1. D'après (6)

$$\| T' \cdot w_a \|_p \leqslant C_1 \| T' \cdot P_{2n} \|_p + C_2 n^{-a} \| T' \|_p = A + B$$

en utilisant (1) et la proposition

$$B \leqslant C_2 K_{0,a} n \| T \cdot w_a \|_p$$

et l'on a

$$A \leqslant C_1 \| (T \cdot P_{2n})' \|_p + C_1 \| T \cdot P_{2n}' \|_p$$

donc avec (1) et (8)

$$A \leqslant C_1 3n \| T \cdot P_{2n} \|_p + C_1 a n^{1-a} \| T \|_p$$

et d'après (7)

$$A \leqslant 3 C_1 C_3 n \| T \cdot w_a \|_p + C_1 (3 C_4 + a) n^{1-a} \| T \|_p$$

donc d'après la proposition

$$A \leqslant C_1 (3 C_3 + K_{0,a} (3 C_4 + a)) n \| T \cdot w_a \|_p .$$

Supposons maintenant que $1 < a \leq 2$ et soit Q_n le polynôme trigonométrique du Lemme 2. En procédant comme pour le cas précédent on obtient facilement à l'aide de (12)

$$\|T' \cdot w_a\|_p \leq (2C_5(C_7 + C_8K_{0,a}) + C_6K_{0,a})\, n\, \|T \cdot w_a\|_p + C_5 \|T \cdot Q'_n\|_p .$$

Il suffit donc de majorer $\|T \cdot Q'_n\|_p$: utilisons (14)

$$\|T \cdot Q'_n\|_p \leq C_9 \|T \cdot w_{a-1}\|_p + C_{10} n^{1-a} \|T\|_p$$

et avec la proposition

$$\|T \cdot Q'_n\|_p \leq (C_9K_{a-1,1} + C_{10}K_{0,a})\, n\, \|T \cdot w_a\|_p .$$

Supposons pour terminer que $a > 2$. Nous poserons $a = 2b + \alpha$ avec $b \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 2[$.

Rappelons que pour $\theta \in K$ on a: $|\theta| \leq \pi |\sin \frac{1}{2}\theta| = \pi[\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)]^{1/2}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|T' \cdot w_a\|_p &\leq \pi^{2b} 2^{-b} \|T' \cdot (1 - \cos \theta)^b \cdot w_\alpha\|_p \\ &\leq \pi^{2b} 2^{-b} (\|(T \cdot (1 - \cos \theta)^b)' \cdot w_\alpha\|_p \\ &\quad + b \|T \cdot \sin \theta (1 - \cos \theta)^{b-1} \cdot w_\alpha\|_p). \end{aligned}$$

Mais $\alpha < 2$ donc

$$\begin{aligned} \|(T \cdot (1 - \cos \theta)^b)' \cdot w_\alpha\|_p &\leq C_{21}(n + b) \|T \cdot (1 - \cos \theta)^b \cdot w_\alpha\|_p \\ &\leq C_{22} n \|T \cdot w_a\|_p \end{aligned}$$

car $1 - \cos \theta \leq \frac{1}{2}\theta^2$ et pour la même raison

$$\begin{aligned} \|T \cdot \sin \theta (1 - \cos \theta)^{b-1} \cdot w_\alpha\|_p &\leq 2^{1-b} \|T \cdot w_{a-1}\|_p \\ &\leq 2^{1-b} K_{a-1,1} n \|T \cdot w_a\|_p \end{aligned}$$

d'après la proposition, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarques

1. Le théorème est optimal en ce qui concerne l'exposant de n comme le montre l'exemple $T(\theta) = \cos n\theta$.

2. Nous nous sommes limités ici à la fonction w_a pour des raisons de simplicité d'écriture. Cependant on remarquera que la méthode de démonstration s'applique aussi, à quelques modifications près aux fonctions du type $\theta \to \prod_{i=1}^{k} w_{a_i}(\theta - \theta_i)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. G. LORENTZ, "Approximation of Functions," Holt, Rinehart & Winston, New York, 1966.
2. I. P. NATANSON, "Constructive Function Theory," Vol. I, Ungar, New York, 1964.
3. A. F. TIMAN, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable," Pergamon, Elmsford, N.Y., 1963.